رفع ابهام حالت $\frac{0}{0}$ وقتی $x \to a$

برای رفع ابهام حالت $\frac{0}{0}$، به یکی از روش های زیر و یا ترکیبی از دو یا چند روش زیر عمل می کنیم:

۱) حذف عامل صفرکننده

۲) هوپیتال

۳) هم ارزی

۱– روش حذف عامل صفرکننده:

اگر $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$، در این صورت برای حذف عامل صفرکننده $(x-a)$ یا عاملی که وقتی $x \to a$ ، برابر صفر می شود می توانیم با توجه به نوع تابع عامل صفر کننده را حذف نماییم.

الف) اگر توابع f و g چند جمله ای باشند

در این گونه مسائل با استفاده از تجزیه و یا تقسیم توابع f و g بر عامل ابهام $x-a$،این عامل را در صورت و مخرج کسر تولید و از صورت و مخرج حذف می کنیم و در نهایت حد تابع را بدست می آوریم.

ب) اگر حداقل یکی ازتوابع f و g عبارتی رادیکالی باشد

برای رفع ابهام حد، می توان صورت و مخرج کسر را در عامل گویا کننده ی عبارت رادیکالی ضرب کنیم.

ج) اگر حداقل یکی از توابع f و g عبارت مثلثاتی باشد

با کمک اتحادهای مثلثاتی صورت با مخرج را آن قدر ساده می کنیم تا عامل صفرکننده در صورت و مخرج ظاهر شود و سپس از صورت و مخرج حذف می کنیم و حاصل حد را بدست می آوریم.

۲– قاعده ی هوپیتال

اگر توابع f و g در همسایگی محذوف نقطه ی $x=a$ مشتق پذیر باشند، g' در هر نقطه از این همسایگی مخالف صفر باشد، $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$ و $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$، آن گاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$. $(L\in R)$

نکته: اگر $\lim_{x\to a}\frac{f'_{(x)}}{g'_{(x)}}=\frac{0}{0}$، مجددا می توان از قاعده ی هوپیتال استفاده کرد. در واقع در صورت برقراری شرایط $\frac{0}{0}$ هر تعداد بار می توان از قاعده ی هوپیتال استفاده کرد.

نکته: در استفاده از قاعده هوپیتال باید از صورت و مخرج **جداگانه** مشتق گرفته شود.

۳–روش هم ارزی

دو تابع هم ارز: توابع f و g را در همسایگی $x=a$ (می تواند ∞ باشد) هم ارز گوییم و به صورت $f\sim g$ نمایش داده می شود اگر دو شرط زیر برقرار باشد:

الف. $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$

ب. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

چند مورد از هم ارزی های مهم در حالت $u\to 0$ به صورت زیر می باشد:

$\sin u\sim u$　　$\sin^{-1}u\sim u$　　$\sin^n u\sim u^n$

$\tan u\sim u$　　$\tan^{-1}u\sim u$　　$\tan^n u\sim u^n$

$(1\pm u)^n\sim 1\pm nu$　　$\sqrt[n]{(1\pm u)}\sim 1\pm\frac{u}{n}$　　$1-\cos^n u\sim n\frac{u^2}{2}$

$\tan u-u\sim\frac{u^3}{3}$　　$u-\sin u\sim\frac{u^3}{6}$　　$\tan u-\sin u\sim\frac{u^3}{2}$

نکته: در بسیاری از مسائل ابهام $\frac{0}{0}$ به صورت رادیکالی استفاده از هوپیتال در ابتدای حل مسئله بسیار وقت گیر می باشد که در این مسائل می توانیم با استفاده از ضرب و تقسیم در عامل مزدوج تابع را ساده تر نموده و سپس از قاعده هوپیتال استفاده نماییم.

مثال:

نکته بسیار مهم : در حل مسائل که دارای قدرمطلق یا جزصحیح باشند ابتدا باید قدر مطلق را تعیین علامت و جزصحیح را تعیین مقدار کنیم وسپس مسائل را حل نماییم.

نکته بسیار مهم : برای تعیین علامت و تعیین مقدار توابع مثلثاتی باید از دایره مثلثاتی استفاده شود.

۱- حد عبارت $\sin\frac{x}{2}\left[\cos\frac{x}{2}\right]-\cos x\left[\sin 2x\right]$ **وقتی** $x\to\pi$ **کدام است؟** (کنکور خارج کشور- ۱۳۹۵)

۱) ۱-		۲) صفر		۳) ۱		۴) حد ندارد

برای بدست آوردن حد توابع با جزء صحیح اولین قدم تعیین مقدار جزء صحیح می باشد از آن جا که عبارت داخل جزء صحیح مثلثاتی می باشد باید از دایره مثلثاتی استفاده کنیم و چون در صورت مسئله به حد چپ یا حد راست اشاره نشده است باید هر ۲ طرف چپ و راست محاسبه شود.

$$\lim_{x\to\pi^+}\sin\frac{x}{2}\left[\cos(\frac{\pi}{2})^+\right]-\cos x\left[\sin(2\pi)^+\right]=\sin\frac{x}{2}(-1)-\cos x\,(0)=-\sin x$$

$$\to\lim_{x\to\pi^+}(-\sin\frac{\pi}{2}^+)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$$

$$\lim_{x\to\pi^-}\sin\frac{x}{2}\left[\cos(\frac{\pi}{2})^-\right]-\cos x\left[\sin(2\pi)^-\right]=\lim_{x\to\pi^-}\sin\frac{\pi}{2}(0)-\cos(-1)$$

$$=\lim_{x\to\pi^-}\cos x=-1$$

چون حد چپ و حد راست موجود و با هم برابر می باشد حاصل حد تابع (۱-) می باشد.

۲- اگر $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1}$ **باشد،** b **کدام است؟** (کنکور خارج کشور- ۱۳۹۵)

با قرار دادن $x=1$ در مخرج تابع مقدار مخرج تابع برابر صفر می شود پس برای اینکه حاصل حد عدد متناهی باشد باید $x=1$ ریشه صورت تابع هم باشد تا حاصل کسر به صورت $\frac{0}{0}$ شود.

$$\sqrt{a(1)+b}-2=0\rightarrow\sqrt{a+b}=2\rightarrow a+b=4$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{ax+b}}{x^2-1}=\frac{0}{0}\rightarrow HoP\rightarrow\lim_{x\to1}\frac{\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}}{2x}=\frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{x=1}\frac{\frac{a}{2\sqrt{a+b}}}{2\times1}=\frac{3}{2}\rightarrow\frac{a}{4\sqrt{a+b}}=\frac{3}{2}\rightarrow$$

$$a=6\sqrt{a+b}\rightarrow a^2=36(a+b)\rightarrow$$

$$a^2=36\times4\rightarrow a=\sqrt{36\times4}\rightarrow a=12$$

$$a+b=4\rightarrow12+b=4\rightarrow b=-8$$

۳- حاصل $\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]\times\cot x$ **کدام است؟** (کنکور خارج کشور- ۱۳۹۴)

۱) ۱-　　　　۲) صفر　　　　۳) ۱　　　　۴) حد ندارد

می دانیم $\underset{u\to0}{\sin u}\sim u$ می باشد پس:

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{x}{x}\right]\cot x=\lim_{x\to0}[1]\cot x$$

هم چنین:

برای $\sin x < x \Rightarrow \dfrac{\sin x}{x} < 1$ $\qquad$ $\sin x < x < \tan x \qquad x > 0$

برای $\sin x > x \Rightarrow \dfrac{\sin x}{x} < ۱$ $\qquad$ $\sin x > x > \tan x \qquad x < 0$

با توجه به نکته بالا:

$$\lim_{x \to 0^+} \left[1^-\right] \cot x = 0 \times \cot x$$ = صفر مطلق × ∞= صفر

$$\lim_{x \to 0^-} \left[1^-\right] \cot x = 0 \times \cot x$$ = صفر مطلق × ∞= صفر

حد چپ و راست موجود و با هم برابر صفر می باشد پس گزینه ۲ گزینه صحیح می باشد.

۴- **حاصل** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos 5x}}{x^2}$ **کدام است؟** (کنکور خارج کشور- ۱۳۹۳)

۱) ۲ $\qquad$ ۲) ۳ $\qquad$ ۳) ۴ $\qquad$ ۴) ۶

برای رفع ابهام توابع رادیکالی در بسیاری از مسائل بهتر است عبارت را در مزدوج ضرب و تقسیم نموده و پس از حذف رادیکال از قاعده هوپیتال استفاده نماییم.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos 5x}}{x^2} \times \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos 5x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos 5x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{x^2 \left(1+1\right)} \xrightarrow{HoP}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\sin x + 5\sin 5x}{4x} \sim \lim_{x \to 0} \frac{-x + \left(25x\right)}{4x} = \lim_{x \to 0} \frac{24x}{4x} = 6$$

۵- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}|x|\left[\frac{1}{x}\right]$ **کدام است؟** (کنکور خارج کشور- ۱۳۹۳)

۱) ۱-　　۲) حد ندارد　　۳) صفر　　۴) ۱

برای توابع با قدر مطلق ابتدا باید عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علام نماییم از آن جایی که صورت سوال تعیین نکرده x از کدام طرف به صفر میل می کند در نتیجه باید از هر ۲ طرف بررسی شود.

می دانیم اگر $u\to\infty$ در این حالت $[u]\sim u$ که با استفاده از این نکته چون $x\to 0$ پس $\frac{1}{x}\to\infty$

$$\lim_{x\to 0^+}|x|\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0^+}x\times\frac{1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}|x|\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0^-}(-x)\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0^-}(-x)\times\frac{1}{x}=-1$$

چون حد چپ و حد راست با هم برابر نمی باشد تابع حد ندارد.

۶- حد عبارت $\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]\cos 3x+\left[\tan^2 x\right]$ **وقتی** $x\to\frac{\pi}{3}$ **کدام است؟** (سراسری ریاضی- ۹۵)

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) حد ندارد

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^+}\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]\cos 3x+\left[\tan^2 x\right]=\lim\left[\sin 0^+\right]\cos 3x+\left[\tan^2\frac{\pi}{3}^+\right]$$

$$=\lim(0)\times\cos 3x+\left[\left(\sqrt{3}\right)^{2+}\right]=3$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^-}\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]\cos 3x+\left[\tan^2 x\right]=\lim\left[\sin 0^-\right]\cos 3x+\left[\tan^2\frac{\pi}{3}^-\right]$$

$$=\lim(-1)\cos 3\times\left(\frac{\pi}{3}\right)+\left[\left(\sqrt{3^-}\right)^2\right]=-1\times(-1)+\left[3^-\right]=1+2=3$$

حد چپ و حد راست با هم برابر می باشد حاصل حد تابع برابر ۳ می باشد.

۷- حد عبارت $\frac{1}{x^2}\left(1-x^2\left[\frac{1}{x^2}\right]\right)$ **وقتی** $x\to 0$ **کدام است؟** (سراسری ریاضی- ۹۵)

توابع متناوب در بی نهایت حد ندارند(به جز توابع ثابت که خود نوعی تابع متناوب می باشند)، یکی از مهم ترین توابع متناوب تابع زیر می باشد:

$$u-[u]$$

چون $x\to 0$ می باشد لذا $\frac{1}{x^2}\to\infty$ می باشد.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(1-x^2\left[\frac{1}{x^2}\right]\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}-\left[\frac{1}{x^2}\right]\Rightarrow$$

حد ندارد.

۸- حاصل $\lim_{x\to 0}\left([2x]+[-2x]\right)\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^3}}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۴)

می دانیم:

$$[u]+[-u]=\begin{cases}0 & u\in z\\ -1 & u\notin z\end{cases}$$

به دلیل اینکه $x\to 0$، مقدار x نزدیک به صفر می باشد و هیچ گاه به صفر نمی رسد لذا باید حالت $u\notin Z$ را در نظر بگیریم یعنی:

$$[2X]+[-2X]=-1$$

$$\lim_{x\to 0}(-1)\times\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}}\times\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}=\lim-\frac{\left(1-\cos^3 x\right)\left(1+\sqrt{1+0}\right)}{1-\left(1+x^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\left(1-\cos^3 x\right)(2)}{-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos x)\left(1+\cos x^2+\cos x\right)(2)}{-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2(3)(1-\cos x)}{-x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-6(1-\cos x)}{-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-6\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{-x^2}\lim\frac{-6\times\frac{2x^2}{4}}{-x^2}=+3$$

۹- حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\sqrt{\cos x}}{x^2}$ **کدام است؟** (سراسری ریاضی-۹۳)

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

با ضرب و تقسیم در خروج رادیکال تابع را ساده تر می نماییم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\sqrt{\cos x}}{x^2}\times\frac{\cos^2 x+\sqrt{\cos x}}{\cos^2 x+\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^4 x-\cos x}{x^2\left(\cos^2 x+\sqrt{\cos x}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\left(\cos^3 x-1\right)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1)(\cos x-1)\left(\cos^2 x+1+\cos x\right)}{2x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1)\left(-2\sin^2\frac{x}{2}\right)(1+1+1)}{2x^2}\sim\lim_{x\to 0}\frac{-2\times\frac{x^2}{4}\times 3}{2x^2}=-\frac{3}{4}$$

یادآوری:

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$$

رفع ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ وقتی $x \to \pm\infty$

الف. در توابع گویا می توانیم صورت و مخرج را بر بزرگترین توانی از x که در مخرج وجود دارد تقسیم کنیم سپس با استفاده از $\lim_{x\to+\infty} \frac{c}{x^r} = 0$ حدها را می یابیم.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 - x^2 + x - 1}{4x^3 + x + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3})}{x^3(4 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3})} = \frac{3-0+0-0}{4+0+0} = \frac{3}{4}$$

برای توابع رادیکالی هم راه حل بالا صادق است.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x + \sqrt{x^2+2}}{x + 3\sqrt[3]{x}} = \frac{x(3 + \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}})}{x(1 + \sqrt{2 + \frac{1}{x}})} = \frac{3+1}{1+\sqrt{2}} = \frac{4}{1+\sqrt{2}}$$

نکته: استفاده از هم ارزی های زیر می تواند به حل تست های این قسمت کمک شایانی کند.

الف. حد هر چندجمله ای از x وقتی $x \to \pm\infty$ برابر حد جمله ی دارای بزرگترین توان چندجمله ای می باشد

$$\underset{x\to\pm\infty}{ax^n + bx^{n-1} + \dots} \simeq \underset{x\to\pm\infty}{ax^n}$$

.

ب. در توابع گویا($x \to \pm\infty$):

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \cdots}{a'x^n + b'x^{n-1} + c'x^{n-2} + \cdots} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^m}{a'x^n}$$

که سه حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

$$۱)\ m < n \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = ۰$$

$$۲)\ m = n \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{a'}$$

$$۳)\ m > n \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \text{ یا } -\infty \text{ یا } \pm\infty$$

ج. برای توابع رادیکالی می توانیم از هم ارزی های زیر استفاده نماییم($x \to \pm\infty$).

$$\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \ldots + c} = \sqrt[n]{a}\left|x + \frac{b}{na}\right| \quad (n \in 2k)$$

$$\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \ldots + c} = \sqrt[n]{a}\left(x + \frac{b}{na}\right) \quad (n \in 2k+1)$$

$$(x+k)\sqrt[n]{\frac{x+a}{x+b}} \sim (x+k)\frac{a-b}{n}$$

رفع ابهام $\infty - \infty$ وقتی $x \to \pm\infty$

در این حالت از ابهام عموما دو حالت مختلف در سوالات طرح می شود:

الف. اگر f و g هر دو کسری و بدون رادیکال باشند از مخرج مشترک گیری استفاده می کنیم تا حد به $\frac{\infty}{\infty}$ (یا یک حد غیر مبهم) تبدیل شود.

ب. اگر f و g حداقل یکی به صورت رادیکالی باشد می توانیم با استفاده از ضرب و تقسیم در مزدوج حد را به صورت $\frac{\infty}{\infty}$ (یا یک حد غیر مبهم) تبدیل کنیم.

۱۰- حد عبارت $\frac{2[x]}{2-x}+\frac{x+2}{x^2-2x}$ **وقتی** $x \to 2^-$ **کدام است؟** (سراسری تجربی خارج کشور ۱۳۹۲)

۱) $-\infty$		۲) $\frac{۱}{۲}$		۳) ۱		۴) $+\infty$

به دلیل وجود جزصحیح در صورت سوال باید ابتدا مقدار جزصحیح را محاسبه نموده و در صورت سوال جایگزین کنیم بدین منظور:

$[۲^-] = ۱$

و با قرار دادن در صورت مسئله صورت سوال به صورت $\frac{x+2}{x^2-2x}+\frac{2}{2-x}$ می شود. حال باید حد تابع را بدست بیاوریم

$$\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{x+2}{x^2-2x}+\frac{2}{2-x}\right)=\infty-\infty$$

که در این حالت می توانیم با مخرج مشترک گیری ابهام را به $\frac{0}{0}$ تبدیل نموده و با روش حذف عامل صفرکننده رفع ابهام کنیم:

$$\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{x+2}{x^2-2x}+\frac{2}{2-x}\right)=\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{x+2-2x}{x(x-2)}\right)=\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{2-x}{x(x-2)}\right)=\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}$$

رفع ابهام $0\times\infty$ وقتی $x\to\pm\infty$ (منظور صفر حدی می باشد)

در این حالت از ابهام می توانیم عامل ∞ را معکوس کرده و به مخرج کسر منتقل کنیم با این کار ابهام از حالت $0\times\infty$ به حالت $\frac{0}{0}$ تبدیل می شود که می توانیم با یکی از سه روش گفته شده حاصل حد را محاسبه نمود.

۱۱- حد عبارت $x\left[\frac{۱}{x}\right]$ در کدام حالت متناهی نیست؟ (سراسری ریاضی-۹۳)

۱) $x \to ۰^-$　　۲) $x \to ۰^+$　　۳) $x \to -\infty$　　۴) $x \to +\infty$

می دانیم $u \to \infty$ باشد $[u] \sim u$ حال به بررسی گزینه ها می پردازیم:

گزینه ۱

چون $x \to 0^- \Leftarrow \frac{1}{x} \to \infty$ در نتیجه $\left[\frac{۱}{x}\right] \sim \frac{۱}{x}$

$$\lim_{x \to \infty} x\left[\frac{1}{x}\right] \sim \lim x \times \frac{1}{x} = 1$$

گزینه ۲

برای گزینه ۲ هم عیناً مانند گزینه ۱ حاصل حد برابر ۱ می باشد.

گزینه ۴

چون $x \to +\infty$ و می دانیم $\frac{(+)\text{عدد}}{+\infty}$ لذا :

$$\lim_{x \to +\infty} x\left[\frac{۱}{x}\right] = \lim_{x \to +\infty} x\left[۰^+\right] = x \times \text{صفر} = \text{صفر مطلق}$$

پس گزینه ۳ گزینه صحیح می باشد.

رفع ابهام 1^∞ (منظور ۱ حدی می باشد)

برای رفع ابهام توابع توانی به صورت a^b که حاصل حد به صورت 1^∞ می باشد برای محاسبه حد تابع می توانیم از رابطه زیر استفاده نماییم.

$$\lim_{x \to \infty} a^b = e^{\lim\limits_{x \to \infty} (a-1) \times b}$$

۱۲- حد دنباله ی $a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n+3}$ **وقتی** $n \to \infty$ **کدام است؟** (سراسری ریاضی- ۹۴)

۱) ۲e	۲) $e^۲$	۳) ۳e	۴) $۳e^۲$

ابهام از نوع 1^{∞} می باشد که می توانیم پس از فرمول بالا استفاده می کنیم

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}-1\right)\times 2n+3=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2-n-1}{n+1}\right)\times 2n+3=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)(2n+3)=e^{2}$$

E-MAIL: Milad.sajjadi619@gmail.com

TELEGRAM: @sajjadimath